$\sqrt{f(x)}$

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Produits de vecteurs

5

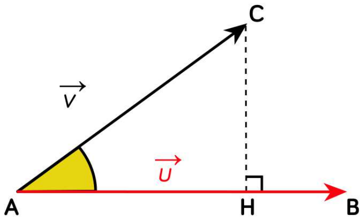
1 – Produit scalaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ exprimés dans la même base $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre (ou réel) $c = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u}\begin{vmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{vmatrix} \qquad \vec{v}\begin{vmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{vmatrix}$$

Son calcul peut être fait de différentes façons :



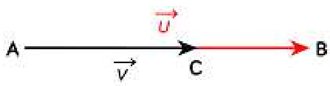
cas général

⇒ A partir des composantes : $c = \vec{u} \cdot \vec{v} = (x_u \cdot x_v) + (y_u \cdot y_v) + (z_u \cdot z_v)$

⇒ A partir des normes : $c = \vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

Cas remarquables :

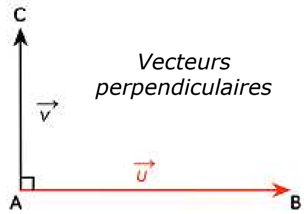
⇒ Vecteurs parallèles : $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\|$



Vecteurs parallèles

⇒ Vecteurs perpendiculaires : $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 90° \quad \Rightarrow \quad cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

⇒ Si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Vecteurs perpendiculaires

A noter : $-\dfrac{\pi}{2} < \left(\vec{u}, \vec{v}\right) < \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad c > 0$ et $\dfrac{\pi}{2} < \left(\vec{u}, \vec{v}\right) < \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad c < 0$

2 – Produit vectoriel

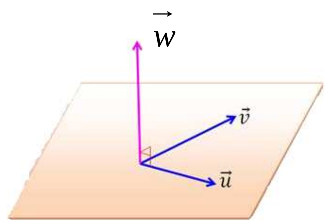
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ exprimés dans la même base $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$.

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Calcul des composantes de $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (u_y \times v_z) - (u_z \times v_y) \\ (u_z \times v_x) - (u_x \times v_z) \\ (u_x \times v_y) - (u_y \times v_x) \end{vmatrix}$$

Cas remarquables :



⇒ Vecteurs parallèles : $\vec{v} = k \cdot \vec{u}, k \in \Re \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = \vec{0}$

⇒ Si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

A noter :

⇒ $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

⇒ La norme de $\vec{w}$ est donnée par $\left\|\vec{w}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

⇒ Le produit vectoriel est anticommutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.